

4.4 Systèmes de coordonnées

Rappel

Soient $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ donnée par

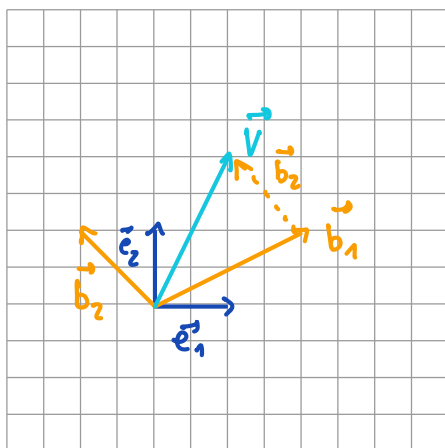
$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$. Pour le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a les combinaisons linéaires

$$\vec{v} = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \text{ et } \vec{v} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2. \quad (\neq)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ par rapport à la base canonique



les coeff. de la comb. lin. dans la base canonique $\mathcal{E}$ donnent les composantes de $\vec{v}$.

Dans $\mathcal{B}$, les composantes de $\vec{v}$ sont différentes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{ou} \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(l'ordre des vecteurs de la base est important !)

Théorème 36. Soient V un espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors pour tout $v \in V$ il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ uniques tels que

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$$

v est comb. lin. des vecteurs de $\mathcal{B}$ et les coefficients sont uniques.

Définition 44 (composantes dans une base).

Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les composantes/coordonnées de l'élément v dans la base $\mathcal{B}$. On note

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} /_{\mathcal{B}}$$

Exemples

1) $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ base can. de $\mathbb{P}_2$

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ s'écrit $[p]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

2) On peut définir la notion de base plus généralement et montrer que

$\mathcal{E} = (1, t, t^2, t^3, \dots)$ est une base de $\mathbb{P}$

3) $\mathcal{B} = (1+t, -1, t^2)$ est une base de $\mathbb{P}_2$ (à vérifier !)

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = a_1(1+t) + (a_1 - a_0)(-1) + a_2 t^2$$

$$\text{et } [p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 - a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = [p(t)]_{\mathcal{B}} \quad (*)$$

$$\text{Par exemple, } [-1 + 2t - \frac{1}{2}t^2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

L'application coordonnée

Définition 45 (application coordonnée).

Soient V un espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . On définit l'application coordonnée

$$[\]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \text{ alors } [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Théorème 37. L'application $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est linéaire et bijective.

Preuve

1) à montrer : $[\alpha v + \beta w]_{\mathcal{B}} = \alpha [v]_{\mathcal{B}} + \beta [w]_{\mathcal{B}}. \quad (*)$

Prenons $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, $w = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$. Alors

$$\underline{\alpha v + \beta w} = \alpha \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n \beta_i b_i \right)$$

$$\stackrel{V \text{ ev.}}{=} \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) b_i + \sum_{i=1}^n (\beta \beta_i) b_i$$

$$\stackrel{V \text{ ev.}}{=} \sum_{i=1}^n (\underline{\alpha \alpha_i + \beta \beta_i}) \underline{b_i} \quad (*) \quad \mathbb{R}^n \text{ ev.}$$

$$\alpha [v]_{\mathcal{B}} + \beta [w]_{\mathcal{B}} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \stackrel{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha \alpha_n + \beta \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= [\alpha v + \beta w]_{\mathcal{B}}$$

2) Pour $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on prend $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Alors

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}. \text{ Donc } [\]_{\mathcal{B}} \text{ est surjective.}$$

3) Pour $v \in V$, on a $[v]_{\mathcal{B}} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$v = 0 b_1 + \dots + 0 b_n = 0_V.$$

$\Rightarrow$ Un EV admettant une base de n éléments peut être assimilé à $\mathbb{R}^n$

Définition 46 (Isomorphisme).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire bijective. Alors T est dit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exemple $\mathbb{P}_3$ est isomorphe à $\mathbb{R}^4$

Application: Pour étudier l'indép. lin. de s

$$p(t) = 1 + 2t - t^3 \text{ et } q(t) = t - t^2 - 2t^3$$

on peut soit résoudre $\alpha p(t) + \beta q(t) = 0$ / soit étudier l'indép. lin. des vecteurs

$$[p(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } [q(t)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^4.$$

Changement de bases

Exemple

Reprenons les bases $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ de l'exemple

ci-dessus et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$. On a $[\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $[\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On veut $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, i.e. $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad /_{\mathcal{E}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} [\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} & [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} & [\vec{v}]_{\mathcal{B}} & [\vec{v}]_{\mathcal{E}} \end{matrix}$$

La matrice obtenue s'appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ (départ) à $\mathcal{E}$ (arrivée), notée $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$.

On a $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} & [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} \end{pmatrix}$. En résolvant l'éq.

matricielle $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ on obtient $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -8/3 \end{array} \right).$$

Si on cherche $[\vec{v}]_{\mathcal{E}}$ et que $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ est connu, il suffit d'effectuer $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}} : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$.

Remarque: Pour trouver $[v]_{\mathcal{B}}$, on peut

- remarquer que $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ est inversible, d'où

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} [\vec{v}]_{\mathcal{E}}. \quad \text{Ici } P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}.$$

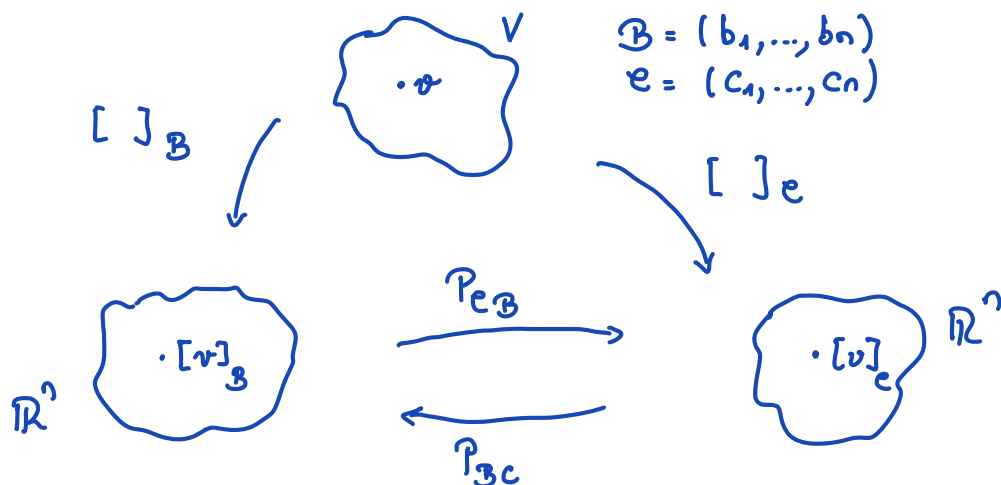
- utiliser le chgt de base "inverse"

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \quad \text{avec}$$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} [\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} & [\vec{e}_2]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}}$$

Généralisation à un espace vectoriel V quelconque

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de V .



Changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$

Soit $v \in V$, on a $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$

$$= \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_n c_n$$

* Si on connaît $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et qu'on cherche $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$,

on doit résoudre

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_{\mathcal{C}}$$

avec $\boxed{P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} \dots [b_n]_{\mathcal{C}})}$, donc $(P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} | [\vec{v}]_{\mathcal{C}})$.

$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ est la matrice de 120 passage ou de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Si on veut passer par une multiplication matrice-vecteur il faudrait

- connaître $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ d'où $[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{E}}$

- voir si $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ est inversible :

les colonnes de $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ sont formées des vecteurs $[b_1]_{\mathcal{E}}, \dots, [b_n]_{\mathcal{E}}$, images par l'isomorphisme $[\]_{\mathcal{E}}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, qui sont lin. indép. Or les isomorphismes conservent l'ind. lin. (voir moodle).

On a $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{E}}$

$$\underbrace{P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}}_{I_n} [v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} [v]_{\mathcal{E}}$$

Théorème 38. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ deux bases de V . Alors il existe une unique matrice $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ telle que

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$$

La matrice $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ est donnée par

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = ([b_1]_{\mathcal{C}} \dots [b_n]_{\mathcal{C}})$$

De plus, elle est inversible d'inverse $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ où $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = ([c_1]_{\mathcal{B}} \dots [c_n]_{\mathcal{B}})$.

Exemple

$V =$ esp. vectoriel des matrices triangulaires sup. de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

on a $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$ et

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

à vérifier : $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ forment bien deux bases.

$$b_1 = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \beta \\ 0 = -\gamma \\ 1 = -\alpha - \beta - \gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 - \beta - \gamma = -2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

d'où $[b_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

on a $[b_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $[b_3]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.5 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 39. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors toute famille d'éléments de V avec plus de n éléments sera linéairement dépendante.

Preuve : en exercice

)) d'où

Théorème 40. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V . Alors toute autre base de V possède exactement n éléments.

Définition 47 (dimension).

Soit V un espace vectoriel.

1. Si V admet une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments, on dira que V est de dimension finie. On notera sa dimension $\dim V$, où $\dim V$ est le nombre d'éléments dans une base quelconque de V .
2. Si V n'admet pas de famille génératrice finie, on dira que V est de dimension infinie et on note $\dim V = \infty$.
3. Si $V = \{0_V\}$, alors on dira que $\dim V = 0$.

$$\alpha \cdot 0_V = 0_V \\ \alpha \neq 0$$

Exemples

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$
- $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$
- $\dim(\mathbb{P}) = \infty$ ($1, t, t^2, t^3, \dots$)
- $\dim(M_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$
- $\dim(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = ?$

Théorème 41 (Base incomplète).

Soient V un espace vectoriel de dimension finie et W un sous-espace vectoriel de V . Alors toute famille d'éléments linéairement indépendants de W peut être complétée en une base de W (et aussi de V). On a que

W est de dim. finie et
 $\dim W \leq \dim V$.

Exemple

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W = \text{plan } Oxy$$

$$\text{Soit } \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

$(\vec{w})$ est une famille lin. indép.
et peut être complétée en une base
de W .

On peut prendre p.ex. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors

$(\vec{w}, \vec{e}_1)$ forme une base de W .

$$2 = \dim W \leq \dim V = 3.$$

Théorème 42. Soit V un espace vectoriel de dimension finie avec $\dim V = n$ pour $n \geq 1$. Alors

1. Toute famille linéairement indépendante d'exactly n éléments est une base de V .
2. Toute famille génératrice formée d'exactly n éléments est une base de V .

Dimension de $\text{Ker}(A)$ et de $\text{Im}(A)$

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ avec $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$.

$$\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$$

$$\bullet \text{Im}(A) = \text{span} \{ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Donc $\dim \text{Im}(A) \leq m$. La famille $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ n'est pas forcément lin. indep. On doit trouver les colonnes pivot pour avoir une base de $\text{Im}(A)$.

$$\dim \text{Im}(A) = \# \text{ de colonnes pivots.}$$

$$\cdot \text{Ker}(A) = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{v} = \vec{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

donc $\dim \text{Ker}(A) \leq n$.

Le # d'éléments dans une base ^{de} $\text{Ker}(A)$ est égale au # de colonnes non pivot, qui correspond au # de variables libres

Définition 48 (rang).

Soient V, W des espaces vectoriels et soit $T : V \rightarrow W$ une transformation linéaire. On appelle *rang* de T la dimension de $\text{Im}(T)$.

$$\text{rang}(T) = \dim \text{Im}(T).$$

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire et si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est la matrice canoniquement associée à T , on a $\text{Im}(T) = \text{Im}(A)$. On parlera alors du rang de A .

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \text{rang}(A) = 3 \quad \text{et } \dim \text{Ker}(A) = 1$$

Exercice : décrire $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$ en trouvant une base pour chacun de ces SEV.

Théorème 43 (du rang).

1. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors

$$\dim \ker(A) + \text{rang}(A) = n$$

$$\# \text{ col. non pivots} + \# \text{ col. pivots} = \# \text{ colonnes}$$

2. Soit $T : V \rightarrow W$ où V et W sont des espaces vectoriels avec V tel que $\dim(V) = n$.

$$\dim \ker(T) + \text{rang}(T) = n = \dim(V)$$

Exemple Si $A \in M_{6 \times 7}(\mathbb{R})$ et que $\dim \ker(A) = 3$,
alors $\text{rang}(A) = 7 - 3 = 4$.

Théorème 44 (Suite du théorème 23).

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible

2. $\text{rang}(A) = n$

3. $\dim \ker(A) = 0$

4. $\det(A) \neq 0$.

Espaces des lignes de A et A^T

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{\vec{a}_1} \quad \dots \quad \underbrace{\quad}_{\vec{a}_n} \in \mathbb{R}^m$

on peut décomposer A
en lignes:

$$A = \begin{pmatrix} \text{lg}_{n_1}(A) \\ \vdots \\ \text{lg}_{n_m}(A) \end{pmatrix}.$$

comme $\text{lg}_{n_i}(A) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$, on a
 $\text{lg}_{n_i}(A)^T \in \mathbb{R}^n \quad \forall 1 \leq i \leq m.$

$$\text{on a } A^T = \begin{pmatrix} \text{lg}_{n_1}(A)^T & \dots & \text{lg}_{n_m}(A)^T \end{pmatrix}$$

Définition 49 (espace des lignes).

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A s'appelle l'espace des lignes et est donné par

$$\text{Lgn}(A) = \text{span} \{ \text{lg}_{n_1}(A)^T, \dots, \text{lg}_{n_m}(A)^T \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

et c'est un SEV de $\mathbb{R}^n$.

Remarque $\left| \text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^T) \right. \quad (*)$

Théorème 45. Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice.

① Si B est une matrice équivalente à A selon les lignes, alors leurs lignes engendrent le même espace.

2. On a

$$\dim \text{Lgn}(A) = \dim \text{Im}(A)$$

" "

$\text{rang}(A^T)$ $\text{rang}(A)$

Preuve

1. les lignes de B sont obtenues à partir de celles de A par des comb. lin. ou en changeant l'ordre des lignes.

Donc les lignes de B sont dans $\text{Lgn}(A)$.

L'inverse est vrai car les op. é.l. sont réversibles.

2. Si B est sous forme E , les lignes non nulles sont lin. indép. En effet, aucune ligne non nulle peut être comb. lin. des lignes en dessous d'elle.

Donc les lignes non nulles forment une base de l'espace des lignes B . (donc aussi de A).

$$\# \text{ lignes non-nulles} = \# \text{ colonnes pivots.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Im}(A), \text{Im}(A^T), \text{Ker}(A), \text{Ker}(A^T).$$

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\cdot \operatorname{Im}(A) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

$$\operatorname{Im}(A^T) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \operatorname{rang}(A^T) = 2$$

Donc: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^T)$, mais $\operatorname{Im}(A) \neq \operatorname{Im}(A^T)$

$$\cdot \dim \operatorname{Ker}(A) = 2 - \operatorname{rang}(A) = 2 - 2 = 0 \Rightarrow A \text{ est injective et } \operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim \operatorname{Ker}(A^T) = 3 - \operatorname{rang}(A^T) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow A^T \text{ non injective}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases} \quad \operatorname{Ker}(A^T) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Remarque

Si A_{ER} la forme ER de A , alors on a

$$\operatorname{Im}(A) \neq \operatorname{Im}(A_{ER}) \quad (\text{en général!})$$

$$\text{d'où} \quad \operatorname{Lgn}(A^T) \neq \operatorname{Lgn}((A_{ER})^T) \quad \text{selon (*)}$$

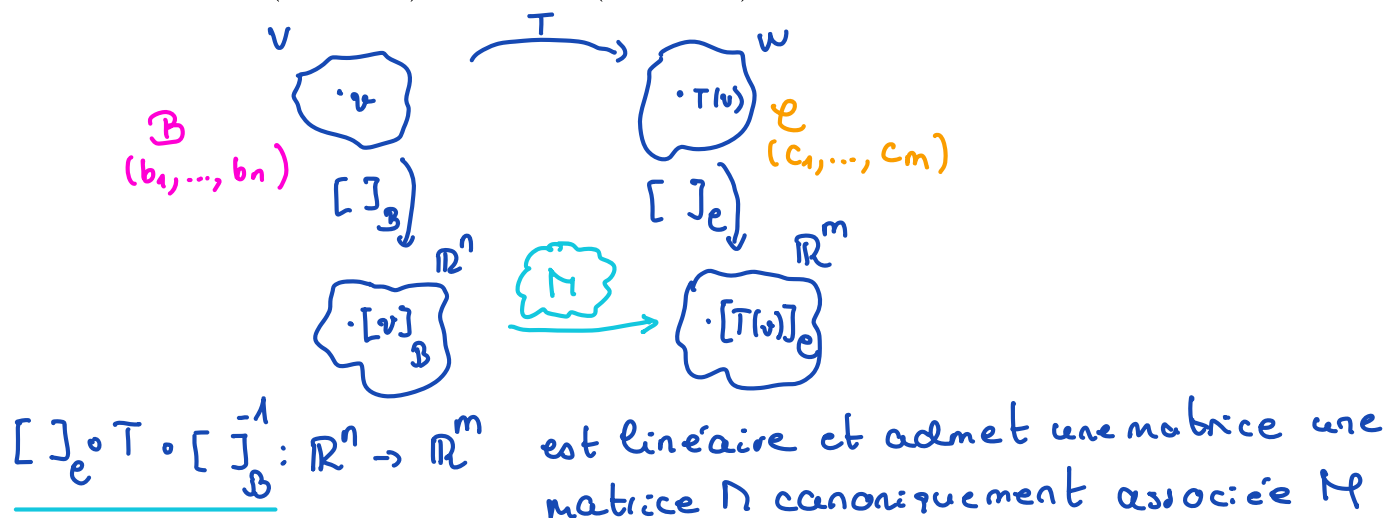
$$\stackrel{||}{\operatorname{Lgn}((A^T)_{ER})} \quad (\text{th. 45(1)})$$

$$\text{donc} \quad \operatorname{Lgn}((A^T)_{ER}) \neq \operatorname{Lgn}((A_{ER})^T) !$$

$$(\text{voir exemple : } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix})$$

4.6 Matrices d'applications linéaires et application coordonnée

Soient V, W des espaces vectoriels, $T : V \rightarrow W$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ resp. $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ des bases de V et W .



Au niveau des coordonnées, l'application T est représentée par une matrice $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ telle que

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = M [v]_{\mathcal{B}}$$

On dira que M représente T dans les bases $\mathcal{B}$ (de départ) et $\mathcal{C}$ (d'arrivée).
Déterminons les coefficients de la matrice M :

Soit $v \in V$ avec $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, autrement dit $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Alors par linéarité de T , on a

$$T(v) = T(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 T(b_1) + \dots + \alpha_n T(b_n).$$

Par linéarité de l'application coordonnée, il vient :

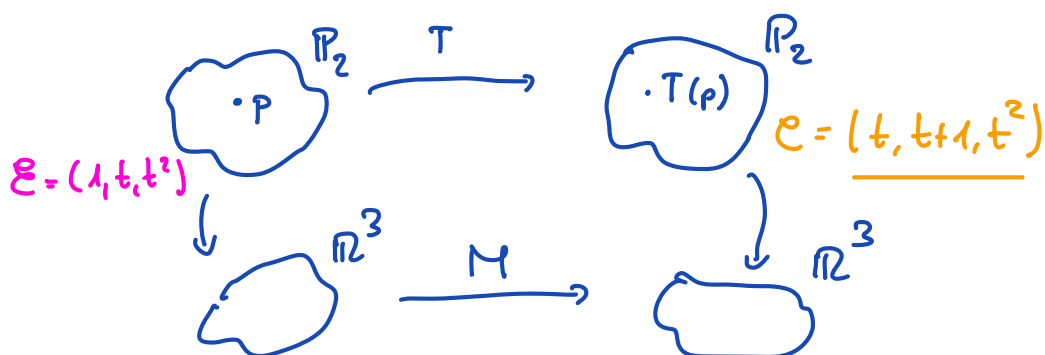
$$\begin{aligned} [T(v)]_{\mathcal{C}} &= [\alpha_1 T(b_1) + \dots + \alpha_n T(b_n)]_{\mathcal{C}} \\ \text{par lin. de } []_{\mathcal{C}} &\leadsto = \alpha_1 [T(b_1)]_{\mathcal{C}} + \dots + \alpha_n [T(b_n)]_{\mathcal{C}} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} [T(b_1)]_{\mathcal{C}} & \dots & [T(b_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}}_{\text{matrice } m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}}} \end{aligned}$$

Remarques

M n'est pas une matrice de changement de base !

Exemple

1a)



avec $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 + 2a_2 t$ (dérivée !)

On cherche M qui représente T dans les bases E et C .

$$[T(p)]_C = M [p]_E$$

$$M = \begin{pmatrix} [T(1)]_C & [T(t)]_C & [T(t^2)]_C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [0]_C & [1]_C & [2t]_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1b) On prend T et on remplace la base d'arrivée par E .

$$M' = \begin{pmatrix} [T(1)]_E & [T(t)]_E & [T(t^2)]_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0]_E & [1]_E & [2t]_E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

Si $T: V \rightarrow V$ est l'appl. identité $T(v) = v$,
alors la matrice Π est la matrice de
chgt de base $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$:

$$\begin{aligned} \Pi &= \left([id(b_1)]_{\mathcal{C}} \dots [id(b_n)]_{\mathcal{C}} \right) \\ &= \left([b_1]_{\mathcal{C}} \dots [b_n]_{\mathcal{C}} \right) = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Exemple:

$V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ avec la base can. $\mathcal{E}$ et la
base $\mathcal{C}$ formée de $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

Pour $T = id_{M_{2 \times 2}(\mathbb{R})}$, on cherche Π t.q.

$$[T(A)]_{\mathcal{C}} = \Pi [A]_{\mathcal{E}}, \text{ c'est-à-dire } [A]_{\mathcal{C}} = \Pi [A]_{\mathcal{E}}$$

$$\Pi = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{C}\mathcal{E}} \text{ (invertible!)}$$

Exercice:

$$T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

- T linéaire
- exprimer la matrice de T dans la base de départ $\mathcal{E}$ et la base d'arrivée $\mathcal{C}$.